Reparamétrisation universelle de familles f-analytiques de cycles et théorème de f-aplatissement géométrique

Daniel Barlet

Reparamétrisation universelle de familles f-analytiques de cycles et théorème de f-aplatissement géométrique.

Daniel Barlet*

10/05/06..

Introduction.

0.1 Présentation.

Le présent article se propose de reprendre et de compléter les résultats de David Mathieu [M.00] en les replaçant dans le cadre des familles f-analytiques de cycles qui me semble bien adapté à ces questions. Le problème "fondamental" qui sous-tend cette étude est, bien sûr, celui des relations d'équivalence analytiques et de l'existence de quotients (ou de quotients méromorphes) dans le cas semi-propre. Cette question qui est résolue dans le cas propre par H. Cartan [C. 60] se ramène en suivant le point de vue "familles analytiques de cycles" développé dans [M.00] et que nous reprenons ici, au théorème d'image directe de R. Remmert [R. 57] et à sa généralisation [M.74] en utilisant les résultats de [B.75] et [B.78].
Comme c'est déjà indiqué par D. Mathieu dans [M.00], le cas semi-propre est à comparer avec les travaux de H.Grauert [G.83] et [G.86] et de B. Siebert [S.93] et [S.94]. Dans ce cas le théorème d'image directe de N. Kuhlmann [K.64] et [K.66] ainsi que la généralisation donnée par D. Mathieu [M.00] donnent le lien avec le point de vue "familles f-analytiques de cycles" que nous introduisons ici.
Il s'agit en fait d'une généralisation de la notion de famille analytique de cycles compacts qui est plus restrictive que la notion de famille analytique de cycles (fermés) qui est utilisée dans [M.00] et qui est bien mieux adaptée aux problèmes que nous traitons ici, comme le lecteur s'en convaincra facilement en comparant nos énoncés et ceux de *loc. cit.*.
Je tiens cependant à préciser que l'article [M. 00] contient les points techniques les

*Université Henri Poincaré et Institut Universitaire de France
Institut Elie Cartan (Nancy) UMR 7502 UHP-CNRS-INRIA
BP 239 - F - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.France.
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr

plus délicats, et que, si les énoncés du présent article semblent plus simples et plus "esthétiques", ils ne sont pas réellement plus profonds que ceux de *loc. cit.*.

0.2 Relations d'équivalence holomorphes et méromorphes.

Une relation d'équivalence analytique sur un espace analytique réduit Z peut être vue comme une collection $(X_z)_{z\in Z}$ de sous-ensembles analytiques fermés (les classes d'équivalence), paramétrée par l'ensemble Z lui-même. Le quotient consiste à identifier deux points $z, z' \in Z$ si et seulement si les sous-ensembles analytiques X_z et $X_{z'}$ coïncident. De ce point de vue, le fait que les X_z forment une partition de Z paraît accessoire. De plus le cas méromorphe conduit très vite à abandonner la condition que les X_z soient disjoints ou égaux.
Ce point de vue met également en évidence le fait que l'espace Z initial joue deux rôles très différents :

- i) Z est l'espace analytique ambiant dans lequel on considère la famille de sous-ensembles analytiques $(X_z)_{z\in Z}$.
- ii) Z est l'espace qui paramètre la famille $(X_z)_{z\in Z}$ considérée.

Dans ce qui suit, nous garderons Z dans son premier rôle (d'espace ambiant) et nous introduirons un espace analytique réduit S, à priori sans relation avec Z, pour paramétrer des sous-ensembles analytiques de Z (en fait des $n-$cycles).
Nous allons considérer un sous-ensemble analytique $G \subset S \times Z$, qui jouera le rôle du graphe de la relation d'équivalence, vérifiant la propriété suivante :
La projection $\pi : G \to S$ est quasi-propre[1], $n-$équidimensionnelle et ses fibres (notées $(X_s)_{s\in S}$) forment une famille analytique de cycles (de dimension pure n) de Z paramétrée par S. Rappelons que cette dernière condition est conséquence des précédentes dès que S est normal.
On remarquera que, si on demande seulement la surjectivité de l'application quasi-propre π et que l'on pose $n := \dim G - \dim S$ en demandant à G et S d'être irréductibles, l'hypothèse précédente est toujours vérifiée sur un ouvert de Zariski dense de S. Nous traiterons ce cas plus général comme le cas "méromorphe", le cas holomorphe correspondant à notre hypothèse plus restrictive ci-dessus.
Nous cherchons maintenant à quotienter l'espace analytique réduit S, supposé faiblement normal (pour éviter de considérer des espaces annelés) par la relation d'équivalence associée à l'application $\chi : S \to \mathcal{C}_n^f(Z)$ qui "classifie" la famille $(X_s)_{s\in S}$ où $\mathcal{C}_n^f(Z)$ désigne l'ensemble de tous les $n-$cycles (fermés) de Z ayant un nombre fini de composantes irréductibles, et où l'application χ est définie par $\chi(s) = X_s$ considéré comme $n-$cycle de Z. On a donc $s \sim s'$ si et seulement si $X_s = X_{s'}$ comme cycles.

[1] La définition est rappelée plus loin.

Ensemblistement le quotient s'identifie donc à $\chi(S)$ à savoir l'ensemble des $n-$cycles qui apparaissent dans la famille analytique considérée. Le problème est donc de munir, sous des hypothèses convenables, le sous-ensemble

$$\chi(S) \subset \mathcal{C}_n^f(Z)$$

d'une structure analytique de dimension finie "naturelle". On ne dispose malheureusement pas d'une structure analytique "raisonnable" sur $\mathcal{C}_n^f(Z)$ comme c'est le cas quand on se limite à considérer des cycles compacts. En particulier certainement pas, en général, d'une structure d'espace analytique de dimension finie[2]. Cependant les espaces classifiants locaux[3] associés aux écailles, qui sont de la forme $H(\bar{U}, Sym^k(B))$, sont des ensembles analytiques banachiques. Ce fait permettra de travailler comme si l'ensemble $\mathcal{C}_n^f(Z)$ était réellement muni d'une structure analytique (de dimension infinie). Mais cela posera quelques problèmes techniques. On constate alors que le problème est alors très similaire à un problème d'image directe, puisque "moralement" l'application χ est analytique et que l'on veut, sous des hypothèses convenables, munir son image d'une structure d'espace analytique réduit de dimension finie (la finitude venant de celle de S).
Quand on aura obtenu une structure de sous-ensemble analytique de dimension finie sur $\chi(S)$, il ne sera pas difficile de montrer que son normalisé faible Q muni de la famille analytique de cycles $(X_q)_{q\in Q}$ de Z obtenue par image réciproque de la famille universelle restreinte à $\chi(S)$ est une "reparamètrisation universelle" des cycles apparaissant dans la famille initiale.
C'est à dire que pour toute famille f-analytiques[4] $(Y_t)_{t\in T}$ de $n-$cycles de Z paramètrée par un espace analytique de dimension finie et faiblement normal T, vérifiant $\forall t \in T \quad \exists s \in S$ tel que $Y_t = X_s$ alors il existe une unique application holomorphe $g: T \to Q$ telle que $\forall t \in T \quad Y_t = X_{g(t)}$.

0.3 Enoncés des deux théorèmes.

Nos deux principaux résultats, qui sont des variantes des théorèmes 4 et 5 de [M.00], s'énoncent de la façon suivante. On trouvera au paragraphe 1 la définition d'une famille f-analytique de $n-$cycles d'un espace analytique complexe Z de dimension finie.

Théorème 0.3.1 (Reparamétrisation universelle dans le cas semi-propre.) *Soit $(X_s)_{s\in S}$ une famille f-analytique de $n-$cycles de Z paramétrée par un espace analytique réduit S de dimension finie et faiblement normal.*
On suppose la famille semi-propre[5]. Alors il existe un espace analytique réduit de

[2] car $\mathcal{C}_n^f(Z)$ n'est pas même localement compact, en général.
[3] pour les revêtements ramifié de degré k sur U contenus dans $U \times B$.
[4] On définira plus loin une famille f-analytique de cycles comme une famille analytique dont le graphe est quasi-propre sur l'espace de paramètre.
[5] c'est à dire que l'application classifiante associée $\chi : S \to \mathcal{C}_n^f(Z)$ est semi-propre.

dimension finie Q faiblement normal et une famille f-analytique $(X_q)_{q\in Q}$ vérifiant la propriété universelle suivante :

Pour toute famille f-analytique $(Y_t)_{t\in T}$ de $n-$cycles de Z, paramétrée par un espace analytique réduit de dimension finie faiblement normal T, vérifiant

$$\forall t \in T \ \exists s \in S \ / Y_t = X_s$$

il existe une unique application holomorphe $g : T \to Q$ telle que l'on ait

$$\forall t \in T \quad Y_t = X_{g(t)}.$$

Bien sur, ceci implique que Q est le quotient de S par la relation d'équivalence donnée par l'égalité des cycles associés, c'est à dire que $s \sim s'$ si et seulement si on a $X_s = X_{s'}$ comme cycles de Z. Ceci est détaillé dans les commentaires qui suivent.

Commentaires.

1. La propriété universelle donnée pour la famille f-analytique $(X_q)_{q\in Q}$ dans le théorème 0.3.1 donne une unique application $\tau : S \to Q$ telle que pour chaque $s \in S$ on ait $X_s = X_{\tau(s)}$. La famille f-analytique $(X_s)_{s\in S}$ initiale est donc l'image réciproque par l'application analytique τ de la famille "reparamètrée". De plus, l'application τ est semi-propre par construction (vue la définition de Q qui est donnée dans la démonstration : elle coïncide à un homéomorphisme près avec l'application classifiante χ qui est semi-propre par hypothèse).
   Enfin l'application τ est également surjective : si q_0 n'est pas dans l'image de τ alors $Q \setminus \{q_0\}$ muni de la famille f-analytique $(X_q)_{q\in Q\setminus\{q_0\}}$ serait une solution de notre problème universel !

2. Réciproquement, étant donnée une famille f-analytique $(X_s)_{s\in S}$ où S est un espace complexe faiblement normal, s'il existe une application holomorphe fermée et surjective $\tau : S \to Q$ sur un espace complexe faiblement normal Q tel que l'on ait $X_s = X_{s'}$ si et seulement si $\tau(s) = \tau(s')$, alors τ est semi-propre :
   En effet, considérons une suite $(q_\nu)_{\nu\geq 1}$ convergeant dans Q vers q_0 et telle que l'on ait, pour chaque $\nu \geq 1, q_\nu \notin \tau(L_\nu)$ où $L_\nu \subset\subset L_{\nu+1}$ est une suite exhaustive de compacts de S. Comme τ est surjective, on peut choisir pour chaque $\nu \geq 1$ un point $s_\nu \in S$ tel que $\tau(s_\nu) = q_\nu$. On a donc $s_\nu \notin L_\nu$ et l'ensemble $\{s_\nu, \nu \geq 1\}$ est fermé dans S. Mais son image par τ n'est pas fermée. Contradiction. On en déduit la semi-propreté de τ.

3. Considérons une application holomorphe $\tau : S \to Q$ entre deux espaces complexes faiblement normaux, et soit $(X_q)_{q\in Q}$ une famille analytique de $n-$cycles de Z paramètrée par Q. Notons par $(X_s)_{s\in S}$ la famille image

réciproque par τ de la famille $(X_q)_{q\in Q}$. Notons respectivement par $\Gamma \subset Q\times Z$ et $G \subset S \times Z$ les graphes de ces deux familles analytiques et par $\tilde{\pi}$ et π leurs projections respectives sur Q et S.
Alors, si $\tilde{\pi}$ est quasi-propre, π est quasi-propre. Et réciproquement, si π est quasi-propre et τ semi-propre, alors $\tilde{\pi}$ est quasi-propre.

Preuve. Fixons $s_0 \in S$. La quasi-propreté de $\tilde{\pi}$ donne l'existence d'un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $\tau(s_0)$ dans Q et d'un compact K dans Z tels que pour chaque $q \in \mathcal{V}$ chaque composante irréductible de X_q rencontre K. Alors $\tau^{-1}(\mathcal{V})$ et K donnent la quasi-propreté de π en s_0.

Réciproquement, supposons que π est quasi-propre et τ semi-propre. Il n'est pas restrictif de supposer τ surjective d'après le théorème d'image directe semi-propre. Considérons alors un point $q_0 \in Q$. La semi-propreté de τ nous donne un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de q_0 dans Q et un compact L de S tels que $\mathcal{U} \subset \tau(L)$. Pour chaque $s \in L$ la quasi-propreté de π nous fournit un voisinage ouvert $\mathcal{V}_s$ de s et un compact K_s de Z tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{V}_s$ chaque composante irréductible de X_σ rencontre K_s. Extrayons un sous-recouvrement fini $s_1, \cdots, s_N$ de L et posons $\mathcal{K} := \cup_{j=1}^{N} K_{s_j}$. Alors pour tout $q \in \mathcal{U}$ chaque composante de X_q rencontre $\mathcal{K}$. En effet, il existe $s \in L$ such that $\tau(s) = q$ et on a donc $X_s = X_q$. $\blacksquare$

Théorème 0.3.2 (f-aplatissement géométrique.) *Soit Z un espace analytique complexe de dimension finie et soit S un espace analytique réduit irréductible de dimension s. Soit $G \subset S\times Z$ un sous-ensemble analytique irréductible de dimension $s+n$ tel que la projection $\pi : G \to S$ soit quasi propre et surjective. Soit $\Sigma \subset S$ un sous-ensemble analytique fermé et d'intérieur vide dans S tel que la restriction*

$$\pi : G \setminus \pi^{-1}(\Sigma) \to S \setminus \Sigma$$

ait pour fibres une famille f-analytique[6] *de $n-$cycles de Z.*
On suppose que l'application $\bar{\tau} : \overline{\Gamma} \to S$ de projection sur S de l'adhérence dans $S \times \mathcal{C}_n^f(Z)$ du graphe de l'application classifiante $\chi : S \setminus \Sigma \to \mathcal{C}_n^f(Z)$, est propre[7].
Alors il existe un espace faiblement normal $\tilde{S}$ une famille f-analytique $(\tilde{X}_{\tilde{s}})_{\tilde{s}\in\tilde{S}}$ et une modification propre (globale) $\tau : \tilde{S} \to S$ de centre contenu dans Σ vérifiant les propriétés suivantes :

1. *La restriction à $\tilde{S} \setminus \tau^{-1}(\Sigma) \simeq S \setminus \Sigma$ redonne la famille $(X_s)_{s\in S\setminus\Sigma}$.*

[6]Il suffit pour cela que Σ contienne le lieu des fibres de dimension $> n$ et le lieu non normal de S.

[7]La signification géométrique de cette hypothèse, dont nous montrons dans le commentaire ci-après qu'elle est **nécessaire**, est discutée au paragraphe 3.3.

2. *Pour tout ensemble analytique réduit et faiblement normal* T *muni d'une famille f-analytique* $(Y_t)_{t\in T}$ *et d'une modification propre locale*[8] $\theta : T \to S'$ *de centre contenu dans* Σ*, tel que la restriction à* $T \setminus \theta^{-1}(\Sigma)$ *de la famille* (Y_t) *coïncide avec l'image réciproque de la famille initiale, il existe une unique application holomorphe* $\varphi : T \to \tilde{S}$ *au dessus de* S'[9] *telle que l'on ait* $Y_t = \tilde{X}_{\varphi(t)} \quad \forall t \in T$.

On peut alors utiliser le théorème 0.3.1 précédent, sous réserve que la famille paramétrée par $\tilde{S}$ soit semi-propre (ce qui équivaut maintenant à la semi-propreté de la projection de $\overline{\Gamma}$ dans $\mathcal{C}_n^f(Z)$) pour obtenir un quotient méromorphe de S.

Commentaire.

La condition de propreté de la projection $\bar{\Gamma} \to S$ qui est demandée dans l'hypothèse du théorème d'aplatissement géométrique est nécessaire. En effet, si on a une modification propre locale le long de $\Sigma \cap S'$, $\tau : \tilde{S}' \to S'$ le long de $\Sigma \cap S'$, où S' est un ouvert de S, telle que l'on ait une famille f-analytique $(X_{\tilde{s}})_{\tilde{s}\in\tilde{S}'}$ qui induit la famille initiale sur $S' \setminus \Sigma$, l'application

$$\tau \times \chi' : \tilde{S}' \to S' \times \mathcal{C}_n^f(Z)$$

où l'application $\chi' : \tilde{S}' \to \mathcal{C}_n^f(Z)$ classifie la famille f-analytique paramétrée par $\tilde{S}'$, sera propre et son image sera exactement $\bar{\Gamma}_{|S'} \subset S' \times \mathcal{C}_n^f(Z)$. En effet $(\tau \times \chi')(S' \setminus \Sigma)$ est contenu dans Γ par définition, et $\tilde{S}'$ est l'adhérence de $S' \setminus \Sigma \simeq \tilde{S}' \setminus \tau^{-1}(\Sigma)$. Donc l'image est bien dans $\bar{\Gamma}$.
Réciproquement, si $(\sigma, X) \in \bar{\Gamma}_{|S'}$ il existe une suite $(s_\nu)_{\nu\geq 1}$ dans $S' \setminus \Sigma$ qui converge vers σ telle que X_{s_ν} converge vers X dans $\mathcal{C}_n^f(Z)$. Comme τ est propre, on peut relever la suite $(s_\nu)_{\nu\geq 1}$ en une suite de $\tilde{S}'$ convergente $(\tilde{s}_\nu)_{\nu\geq 1}$ vers un point $\tilde{\sigma} \in \tau^{-1}(\sigma)$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{C}_n^f(Z)$ on aura $X_{\tilde{\sigma}} = X$ et donc l'égalité désirée $(\tau \times \chi')(\tilde{\sigma}) = (\sigma, X)$.
Alors la projection $p' : \bar{\Gamma}_{|S'} \to S'$ vérifiera l'égalité

$$p' \circ (\tau \times \chi') = \tau.$$

La propreté de p' résulte alors de celle de τ.

[8] Donc S' est un ouvert de S.
[9] C'est à dire vérifiant $\tau \circ \varphi = \theta$.

1 Cycles de type fini.

1.1 Topologie de $\mathcal{C}_n^f(Z)$.

Dans ce qui suit nous appellerons espace analytique complexe de dimension finie, un espace analytique complexe qui est **localement** de dimension finie.
Cette terminologie est destinée à clairement distinguer ceux-ci des ensembles analytiques banachiques que nous serons également amenés à considérer.

Définition 1.1.1 *Soit Z un espace analytique de dimension finie et soit X un $n-$cycle de Z. On dira que X est de* **type fini** *si son support $|X|$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles.*

Nous noterons par $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ l'espace de tous les $n-$cycles fermés de Z muni de sa topologie "naturelle" (voir [M.00] ou [B.M]) et nous noterons par $\mathcal{C}_n^f(Z)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ formé des $n-$cycles (fermés) de type fini.
Nous allons munir ce sous-ensemble d'une topologie plus fine que la topologie induite par celle de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$.

Définition 1.1.2 (Topologie sur $\mathcal{C}_n^f(Z)$.) *Soit $W \subset\subset Z$ un ouvert. Nous noterons par $\Omega(W)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ formé des cycles dont chaque composante irréductible rencontre W. En fait, comme W est supposé relativement compact dans Z, le sous-ensemble $\Omega(W)$ est contenu dans $\mathcal{C}_n^f(Z)$.*
Nous dirons qu'un sous-ensemble Ω de $\mathcal{C}_n^f(Z)$ est ouvert si pour tout $X_0 \in \Omega$ il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ contenant X_0 et un ouvert $W \subset\subset Z$ tel que $X_0 \in \Omega(W)$ vérifiant

$$\mathcal{U} \cap \Omega(W) \subset \Omega.$$

Remarques.

1. Les ouverts de la forme $\mathcal{U} \cap \Omega(W)$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ et $W \subset\subset Z$ un ouvert de Z, forment donc une base de cette topologie.

2. Cette topologie est plus fine que la topologie induite par $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ qui est séparée. Elle est donc séparée.

3. Pour cette topologie le sous-ensemble $\Omega(\emptyset) = \{\emptyset\}$ est ouvert et fermé.
   Rappelons que $\{\emptyset\}$ n'est pas ouvert pour la topologie de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$.

Pour $|Q| \subset \mathcal{C}_n^f(Z)$ notons par Q^f et Q^{loc} les espaces topologiques sur $|Q|$ définis respectivement par les topologies induites par $\mathcal{C}_n^f(Z)$ et $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$.
La notion de fuite à l'infini de [M.00] peut être introduite de la façon suivante, pour un sous-ensemble de $\mathcal{C}_n^f(Z)$:

Définition 1.1.3 *Soit $|Q|$ un sous-ensemble de $\mathcal{C}_n^f(Z)$ et soit q_0 un point de $|Q|$. On dira que $|Q|$ est sans fuite à l'infini en q_0 si l'inverse de l'application continue $Id : Q^f \to Q^{loc}$ est continue en q_0.*
Ceci revient exactement à demander qu'il n'existe pas de famille (q_ν) de $|Q|$ qui converge vers q_0 au sens de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$, sans converger au sens de $\mathcal{C}_n^f(Z)$ vers q_0.

On remarquera que si la suite (q_ν) converge vers q_0 dans Q^{loc} sans converger vers q_0 dans Q^f, quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que l'on peut choisir dans chaque cycle q_ν une composante irréductible Γ_ν de sorte que la suite (Γ_ν) converge vers le cycle vide au sens de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$. Ceci revient à dire que pour chaque compact K de Z, il existe $\nu(K)$ tel que pour $\nu \geq \nu(K)$ on ait $\Gamma_\nu \subset Z \setminus K$. D'où la dénomination de "fuite à l'infini".

Un sous-ensemble $|Q| \subset \mathcal{C}_n^f(Z)$ est sans fuite à l'infini en chacun de ses points, si et seulement si l'application $Id : Q^f \to Q^{loc}$ est un homéomorphisme.
Par exemple cette propriété est clairement vérifiée par tout compact de $\mathcal{C}_n^f(Z)$!
On remarquera que si cette propriété est vraie pour $|Q|$ elle est également vraie pour tout sous-ensemble de $|Q|$.
On prendra garde au fait qu'en revanche cette propriété n'est pas nécessairement vérifiée par un sous-ensemble localement compact de $\mathcal{C}_n^f(Z)$ (voir l'exemple 2.3).

La proposition suivante décrit les compacts pour cette topologie. Sa preuve est immédiate d'après ce qui vient d'être dit.

Proposition 1.1.4 *Soit Z un espace analytique complexe de dimension finie et soit K un sous-ensemble de $\mathcal{C}_n^f(Z)$. On a équivalence entre les deux propriétés suivantes:*

1. *K est compact pour la topologie induite par celle de $\mathcal{C}_n^f(Z)$.*
2. *K est un compact de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ qui est sans fuite à l'infini au sens de [M.00].*

Rappelons que les parties relativement compactes de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ coïncident avec les parties bornées (voir [B.M] , [B.06] ou la condition 2) de 3.3).

Corollaire 1.1.5 *Soit Z un espace complexe de dimension finie et soit $(X_\nu)_{\nu\geq 1}$ une suite de $\mathcal{C}_n^f(Z)$ convergeant vers X_0 au sens de la topologie de $\mathcal{C}_n^f(Z)$. Choisissons pour chaque $\nu \geq 1$ une composante irréductible Γ_ν de $|X_\nu|$.*
Alors l'ensemble $\Phi := \{\Gamma_\nu, \nu \geq 1\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_n^f(Z)$.
De plus, toute sous-suite convergente de la suite $\{\Gamma_\nu, \nu \geq 1\}$ a pour limite un cycle non vide qui est réunion de composantes irréductibles de $|X_0|$. La multiplicité dans une telle limite d'une composante irréductible de $|X_0|$ est toujours majorée par la multiplicité de cette composante dans le cycle X_0.

Preuve. D'après la caractérisation des compacts de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ il est clair que Φ est relativement compact dans $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$. Soit $W \subset\subset Z$ un ouvert relativement compact de Z rencontrant chaque composante irréductible de X_0. Alors, il existe ν_0 tel que chaque composante irréductible de X_ν rencontre W pour $\nu \geq \nu_0$. Donc, à fortiori Γ_ν rencontre W pour $\nu \geq \nu_0$. Ceci montre que $\emptyset$ n'est pas un point d'accumulation de l'ensemble Φ dans $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$. Si Ξ est un tel point d'accumulation, on aura $|\Xi| \subset |X_0|$. En effet, si $z \notin |X_0|$ la considération d'une écaille adaptée à X_0 au voisinage de z dans laquelle X_0 est de degré nul, montre que $z \notin |\Xi|$. Donc chaque composante irréductible de Ξ rencontre W, puisque c'est une composante irréductible de $|X_0|$. Ceci montre que $\bar{\Phi}$ est un compact de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ sans fuite à l'infini, donc un compact de $\mathcal{C}_n^f(Z)$ d'après la proposition 1.1.4. L'assertion sur la multiplicité dans un cycle limite d'une composante irréductible de X_0 se déduit facilement de l'hypothèse de convergence vers X_0 de la suite $(X_\nu)_{\nu\geq 1}$ initiale ■

Remarque.

On a un corollaire analogue dans le cadre de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$. La différence fondamentale est que l'ensemble des points d'accumulations du sous-ensemble relativement compact Φ peut être réduit au cycle vide dans ce contexte.
C'est précisément ce qui se produit lors du phénomène de fuite à l'infini !

Le lemme suivant montre que pour l'espace des cycles compacts $\mathcal{C}_n(Z)$ la topologie "usuelle" est celle induite par l'inclusion dans $\mathcal{C}_n^f(Z)$. Ceci montre que l'espace $\mathcal{C}_n^f(Z)$ est probablement une "meilleure" généralisation de l'espace $\mathcal{C}_n(Z)$ des cycles compacts que l'espace $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$.

Lemme 1.1.6 *Soit Z un espace analytique complexe de dimension finie, et soit X_0 un $n-$cycle compact de Z. Alors il existe un ouvert relativement compact W dans Z et un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de X_0 dans $\mathcal{C}_n^f(Z)$ tel que tout $X \in \mathcal{U}$ vérifie $|X| \subset W$, ce qui implique en particulier la compacité de X.*

Preuve du lemme 1.1.6. Fixons une fonction continue d'exhaustion (c'est une fonction continue propre) $\varphi : Z \to [0, +\infty[$.
Soit $\alpha := \sup_{x\in|X_0|} \varphi(x)$, et posons $W := \varphi^{-1}([0, \alpha+1[)$. Recouvrons alors le compact $\varphi^{-1}([\alpha+1, \alpha+2])$ par un ensemble fini d' écailles $(E_i)_{i\in I}$ adaptées à X_0 telle que $\forall i \in I, deg_{E_i}(X_0) = 0$. Recouvrons également le compact $\varphi^{-1}([0, \alpha+1])$ par un nombre fini d'écailles $(E_j)_{j\in J}$ adaptées à X_0. Posons alors[10]

$$\mathcal{U} := \Omega(W) \cap \left(\cap_{h\in I\cup J}\, \Omega_{k_h}(E_h)\right)$$

où $k_h := deg_{E_h}(X_0), \forall h \in I \cup J$.
Considérons alors un cycle X dans $\mathcal{U}$, et soit Γ une composante irréductible

[10] Rappelons que pour une $n-$écaille E sur $Z, \Omega_k(E)$ désigne l'ouvert de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ des cycles X tels que E soit adaptée à X et tels que $deg_E(X) = k$.

de $|X|$. Comme la nullité du degré dans les écailles $(E_i)_{i\in I}$ assure que $|X|$ ne rencontre pas $\varphi^{-1}([\alpha+1,\alpha+2])$ et comme $\varphi(\Gamma)$ est un connexe qui doit rencontrer l'intervalle $[0,\alpha+1[$ puisque Γ rencontre W, on aura $\Gamma\subset\varphi^{-1}([0,\alpha+1[)=W$.$\blacksquare$

Terminons ce paragraphe en donnant la "clef" qui va permettre de remplacer l'espace $\mathcal{C}_n^f(Z)$ par un ensemble analytique banachique.

Proposition 1.1.7 *Soit* $Q\subset\mathcal{C}_n^f(Z)$ *un sous-ensemble localement compact. Alors* Q *est localement fermé. Il vérifie la propriété suivante :*

Pour tout $q_0\in Q$. *Soient* $E_1,\cdots,E_m$ *des écailles adaptées à* q_0 *et notons par* $k_1,\cdots,k_m$ *les degrés respectifs de* q_0 *dans ces écailles. Supposons de plus que chaque composante irréductible de* q_0 *rencontre l'ouvert* $W:=\cup_1^m D(E_i)$ *de* Z[11]. *Alors il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{V}(q_0)$ *de* q_0 *dans* Q, *contenu dans l'ouvert* $\cap_1^m\Omega_{k_i}(E_i)\cap\Omega(W)$ *de* $\mathcal{C}_n^f(Z)$, *tel que l'application "évidente"*

$$\lambda:\cap_1^m\Omega_{k_i}(E_i)\to\prod_1^m H(\bar{U}_i,Sym^{k_i}(B_i))$$

induise un homéomorphisme de $\mathcal{V}(q_0)$ *sur son image (qui est donc localement compacte).*

Preuve. Le fait qu'un sous-ensemble localement compact d'un espace topologique séparé soit localement fermé est général. Rappelons rapidement ce point dans le cas métrisable (les amateurs d'ultra-filtres pourront traiter le cas général...).
Soit $q_0\in Q$ et soit $\mathcal{U}$ un ouvert de l'espace ambiant contenant q_0 dont la trace sur Q est relativement compacte. Soit $(q_\nu)_{\nu\geq1}$ une suite de $Q\cap\mathcal{U}$ convergeant vers $x\in\mathcal{U}$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que la suite $(q_\nu)_{\nu\geq1}$ converge vers un point y du compact $\overline{Q\cap\mathcal{U}}$. On a donc $x=y\in Q\cap\mathcal{U}$. Donc $Q\cap\mathcal{U}$ est fermé dans $\mathcal{U}$.

Considérons maintenant un voisinage ouvert $\mathcal{V}(q_0)$ de q_0 dans Q vérifiant les propriétés suivantes :

1. L'adhérence de $\mathcal{V}(q_0)$ est compacte.
2. L'adhérence de $\mathcal{V}(q_0)$ est contenue dans l'ouvert $\cap_1^m\Omega_{k_i}(E_i)\cap\Omega(W)$ de $\mathcal{C}_n^f(Z)$.

L'application λ est continue et est injective sur l'ouvert $\cap_1^m\Omega_{k_i}(E_i)\cap\Omega(W)$ de $\mathcal{C}_n^f(Z)$, puisque pour un cycle de cet ouvert chaque écaille E_i est adaptée avec le degré k_i, et puisque chaque composante irréductible d'un tel cycle doit rencontrer au moins le domaine d'une de ces écailles. Elle induit donc un homéomorphisme du

[11]Rappelons que pour une $n-$écaille $E:=(U,B,j)$ sur Z le domaine de E est l'ouvert $D(E):=j^{-1}(U\times B)$ de Z.

compact $\overline{\mathcal{V}(q_0)}$ sur son image.
Montrons qu'alors l'application $\lambda : V(q_0) \to \lambda(V(q_0))$ est fermée[12]. Pour cela considérons une suite (X_ν) dans $V(q_0)$ telle que la suite $\lambda(X_\nu)$ converge vers $\lambda(X)$ où $X \in V(q_0)$. La compacité de $\overline{V(q_0)}$ permet, quitte à passer à une sous-suite, de supposer que la suite X_ν converge vers $Y \in \overline{V(q_0)}$. L'injectivité de λ donne alors que $X = Y$, et λ induit bien un homéomorphisme de $V(q_0)$ sur son image. ■

1.2 Familles f-analytiques de cycles de type fini.

Le substitut à une "structure analytique" sur l'espace $\mathcal{C}_n^f(Z)$ sera donné par la notion de famille f-analytique de $n-$cycles de type fini de Z.

Définition 1.2.1 *Nous dirons qu'une famille $(X_s)_{s\in S}$ de $n-$cycles de* **type fini** *de Z paramétrée par un ensemble analytique banachique S est* **f-analytique** *si les conditions suivantes sont réalisées :*

1. *L'application classifiante correspondante $\chi :\to \mathcal{C}_n^f(Z)$ est continue.*
2. *La famille est une famille analytique de $n-$cycles de Z paramétrée par S*[13]

Remarque.
Il ne suffit évidemment pas que chaque cycle X_s soit de type fini dans une famille analytique de cycles $(X_s)_{s\in S}$ pour que la définition précédente soit satisfaite. La proposition ci-dessous montre que, si la famille $(X_s)_{s\in S}$ est analytique, la quasi-propreté (définie ci-après) de la projection sur S du graphe de la famille est nécessaire et suffisante pour satisfaire la définition précédente.

Définition 1.2.2 *Soit S un espace topologique séparé, et soit $G \subset S\times Z$ un sous-ensemble fermé tel que pour chaque $s \in S$ la fibre $|X_s| := \{z \in Z \ / \ (s,z) \in G\}$ soit un sous-ensemble analytique fermé de Z. On dira que la projection $\pi : G \to S$ est* **quasi-propre** *si pour chaque $s \in S$ il existe un voisinage V_s de s dans S et un compact K de Z tel que, pour chaque $s' \in V_s$, chaque composante irréductible de $|X_{s'}|$ rencontre K.*

On a la caractérisation immédiate suivante des familles f-analytiques.

Lemme 1.2.3 *Soit Z un espace complexe de dimension finie, et soit $(X_s)_{s\in S}$ une famille analytique de $n-$cycles de Z paramétrée par un ensemble analytique banachique S. Soit $|\mathcal{X}|$ le support du graphe de cette famille.*
On a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

[12] Rappelons qu'une injection continue d'un espace localement compact n'est pas nécessairement un homéomorphisme sur son image ! Voir 2.3

[13] voir [B.75] ou [B.M.].

1. *La projection* $pr : |\mathcal{X}| \to S$ *est quasi-propre.*
2. *La famille* $(X_s)_{s\in S}$ *est une famille f-analytique.*

Le corollaire suivant est conséquence immédiate de la proposition précédente et du théorème 1 de [B.75].

Corollaire 1.2.4 *Soit* $f : Z \to S$ *une application holomorphe quasi-propre, à fibres de dimension pure* n *entre deux espaces analytiques complexes de dimension finie. On suppose l'espace analytique* S *normal. Alors il existe une unique famille f-analytique* $(X_s)_{s\in S}$ *de* $n-$*cycles de type fini de* Z *telle que pour* $s \in S$ *générique on ait* $X_s = |X_s| = f^{-1}(s)$.

2 Reparamétrisation universelle.

2.1 Le théorème d'image directe semi-propre.

Nous allons rappeler la généralisation de N.Kuhlmann (voir [K.64] et [K.66]) du théorème d'image directe propre de R. Remmert (voir [R.57]). Pour la commodité du lecteur, commençons par donner la définition d'une application semi-propre.

Définition 2.1.1 *Soient* $f : X \to Y$ *une application continue entre deux espaces topologiques séparés. On dit que* f *est semi-propre si pour tout* $y \in Y$ *on peut trouver un voisinage* V_y *de* y *et un compact* K *de* X *vérifiant*

$$V_y \cap f(X) = V_y \cap f(K).$$

On remarquera que ceci impose à $f(X)$ d'être un fermé localement compact de Y. On remarquera également qu'une application quasi-propre est semi-propre.

Théorème 2.1.2 *Soit* $f : X \to Y$ *une application holomorphe semi-propre entre espaces analytiques réduits de dimensions finies. Alors* $f(X)$ *est un sous-ensemble analytique fermé de* Y.

Rappelons également une autre généralisation du théorème d'image directe propre (voir [Ma.74]).

Théorème 2.1.3 *Soit* $f : X \to Y$ *une application holomorphe propre entre un espace analytique réduit de dimension finie* X *et un ouvert* Y *d'espace de Banach. Alors* $f(X)$ *est un sous-ensemble analytique fermé de dimension finie de* Y *qui est localement contenu dans une sous-variété complexe lisse de dimension finie de* Y.

D. Mathieu "fusionne" dans [M.00] ces deux généralisations dans le résultat encore plus général suivant.

Théorème 2.1.4 *Soit* $f : X \to Y$ *une application holomorphe semi-propre entre un espace analytique réduit de dimension finie* X *et un ouvert* Y *d'espace de Banach. Alors* $f(X)$ *est un sous-ensemble analytique fermé de dimension finie de* Y *qui est localement contenu dans une sous-variété complexe lisse de dimension finie de* Y.

Ce résultat étant local sur l'image de f, il est facile de lui donner un aspect "plus général" en remplaçant Y par un sous-ensemble analytique fermé d'un ouvert d'espace de Banach. Par contre, on se convaincra sans peine qu'il n'est pas évident de l'utiliser directement en prenant $Y = \mathcal{C}_n^{loc}(Z)$, ce que D. Mathieu évite soigneusement de faire à juste titre.
On montrera plus loin comment la considération de $\mathcal{C}_n^f(Z)$ permet d'utiliser ce résultat, grâce à la proposition 1.1.7, bien que $\mathcal{C}_n^f(Z)$ ne puisse être utilisé directement comme Y.

2.2 Reparamétrisation universelle des familles f-analytiques semi-propres.

Commençons par donner l'idée directrice. Considérons une famille analytique $(X_s)_{s\in S}$ de cycles **compacts** de Z paramétrée par un espace analytique réduit S.
On s'intéresse à la relation d'équivalence sur S définie par

$$s \sim s' \quad \Leftrightarrow \quad X_s = X_{s'}.$$

L'application "classifiante" $\chi : S \to \mathcal{C}_n(Z)$ qui à $s \in S$ associe le cycle X_s dans l'espace $\mathcal{C}_n(Z)$ définit cette relation d'équivalence, et le quotient s'identifie à l'image $\chi(S)$. On voit donc que l'existence d'une structure naturelle d'espace analytique réduit sur ce quotient, au moins dans le cas où S est supposé faiblement normal[14], revient à montrer un théorème d'image directe. Dans la situation considérée maintenant, puisque l'on sait que $\mathcal{C}_n(Z)$ est un espace analytique de dimension finie (d'après [B.75]), le théorème de N. Kuhlmann (qui est essentiellement "optimal"), donne donc l'existence du quotient cherché sous l'hypothèse de semi-propreté de l'application χ avec une propriété universelle "évidente" par rapport aux familles analytiques de cycles compacts qui ne font intervenir que les cycles figurant dans la famille initiale $(X_s)_{s\in S}$.

[14]c'est à dire que toute fonction sur un ouvert de S qui est méromorphe et continue est holomorphe.

Définition 2.2.1 *Soit Z un espace analytique complexe de dimension finie. Nous appellerons* **graphe universel** *au dessus de $\mathcal{C}_n^f(Z)$ le sous-ensemble fermé*

$$\mathcal{G} := \{(X, z) \in \mathcal{C}_n^f(Z) \times Z \ / \ z \in |X|\}.$$

La projection $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{C}_n^f(Z)$ est quasi-propre, comme conséquence de la définition même de la topologie de $\mathcal{C}_n^f(Z)$.

Si on considère une famille f-analytique $(X_s)_{s\in S}$ de $n-$cycles de Z paramétrée par un ensemble analytique banachique S, on a une application "classifiante"

$$\chi : S \to \mathcal{C}_n^f(Z)$$

et la restriction au-dessus de $\chi(S) = \Xi$ de la projection du graphe universel est une application quasi-propre $\pi : \mathcal{G}_\Xi \to \Xi$ où Ξ est muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{C}_n^f(Z)$.
On remarquera que ceci nous permet d'éviter de parler de familles régulières et de fuite à l'infini (ensembliste ou topologique).

Si l'on suppose l'application classifiante χ semi-propre avec S de dimension finie, on obtient ainsi la variante suivante du théorème 4 de [M.00].

Théorème 2.2.2 *Soit $(X_s)_{s\in S}$ une famille f-analytique de $n-$cycles de Z paramétrée par un espace analytique réduit S de dimension finie et faiblement normal.*
On suppose la famille semi-propre, c'est à dire que l'application classifiante associée $\chi : S \to \mathcal{C}_n^f(Z)$ est semi-propre.
Alors il existe un espace analytique réduit de dimension finie Q faiblement normal et une famille f-analytique $(X_q)_{q\in Q}$ vérifiant la propriété universelle suivante :

Pour toute famille f-analytique $(Y_t)_{t\in T}$ de $n-$cycles de Z, paramétrée par un espace analytique réduit de dimension finie faiblement normal T, vérifiant

$$\forall t \in T \ \exists s \in S \ / Y_t = X_s$$

il existe une unique application holomorphe $g : T \to Q$ telle que l'on ait

$$\forall t \in T \quad Y_t = X_{g(t)}.$$

Bien sûr, ceci implique que Q est le quotient de S par la relation d'équivalence donnée par l'égalité des cycles associés.

Démonstration. Commençons par montrer que le sous-ensemble fermé et localement compact $\chi(S) \subset \mathcal{C}_n^f(Z)$ est naturellement muni d'une structure d'espace analytique réduit de dimension finie et faiblement normal.

Définissons déjà cette structure au voisinage d'un point $q_0 \in \chi(S)$. Puisque l'hypothèses de semi-propreté de χ donne la locale compacité de $\chi(S)$, on peut, d'après la proposition 1.1.7, trouver un voisinage ouvert $\mathcal{V}(q_0)$ dans $\chi(S)$ et une injection continue $\lambda : \mathcal{V}(q_0) \to \prod_1^m H(\bar{U}_i, Sym^{k_i}(B_i))$ qui induise un homéomorphisme de $\mathcal{V}(q_0)$ sur son image. Alors l'application composée

$$\lambda \circ \chi : \chi^{-1}(\mathcal{V}(q_0)) \to \prod_1^m H(\bar{U}_i, Sym^{k_i}(B_i))$$

est semi-propre. De plus elle est holomorphe, par définition de la notion de famille analytique de cycles. Donc son image est naturellement un sous-ensemble analytique localement fermé et de dimension finie de l'ensemble analytique banachique $\prod_1^m H(\bar{U}_i, Sym^{k_i}(B_i))$. Définissons alors une structure d'espace analytique réduit sur $\mathcal{V}(q_0)$ en prenant la **normalisation faible** de celle de cette image.
Montrons maintenant que cette construction se globalise, c'est à dire que la structure ainsi définie ne dépend pas des choix effectués. En effet le seul choix dont dépend notre structure au voisinage de q_0 est celui des écailles adaptées $E_1, \cdots, E_m$. Or si on ajoute une écaille adaptée à q_0 on ne changera pas la dite structure: en effet l'application d'oubli de l'écaille ajoutée est un homéomorphisme holomorphe. On en déduit que cette structure d'espace analytique faiblement normale se globalise.
On conclut alors aisément. ■

Remarque.
Comme l'image réciproque par une application holomorphe $g : T \to Q$ de la famille universelle paramétrée par Q qui est f-analytique doit être f-analytique, on obtient donc une propriété universelle différente de celle du théorème 4 de [M.00].

Rappelons que si le sous-ensemble $|Q| \subset \mathcal{C}_n^f(Z)$ est sans fuite à l'infini en chacun de ses points, alors l'application $Id : Q^f \to Q^{loc}$ est un homéomorphisme.

On constate alors que, si dans le théorème 2.2.2 on suppose de plus que le sous-ensemble $|Q| := \chi(S)$ de $\mathcal{C}_n^f(Z)$ est sans fuite à l'infini[15] en chacun de ses points, toute application continue $g \circ \chi : T \to Q^{loc}$ donne également une application continue $g \circ \chi : T \to Q^f$. D'où la f-analyticité de toute famille analytique constituée de cycles de $\chi(S)$.

La différence entre les deux propriétés universelles données dans [M.00] th.4 et dans le théorème 2.2.2 vient du fait que dans le premier cas la semi-propreté à valeurs dans $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ donne la locale compacité de Q^{loc} et la régularité de la famille implique la non fuite à l'infini en chaque point de $|Q|$. Cela implique évidemment que Q^f est homéomorphe à Q^{loc}.

[15]Prendre garde que ceci est une propriété locale sur Q^{loc} mais qu'elle n'est pas locale sur Q^f.

Dans le second cas, on obtient seulement la locale compacité de Q^f mais celle-ci n'implique pas nécessairement que Q^f est homéomorphe[16] à Q^{loc} comme le montre l'exemple donné ci-dessous.
En ajoutant donc l'hypothèse supplémentaire faite dans [M.00], qui implique que $Id : Q^f \to Q^{loc}$ est un homéomorphisme, on trouve immédiatement que tout famille analytique de cycles qui prend ses valeurs dans $|Q|$ est nécessairement f-analytique.
Ceci redonne bien la propriété universelle "plus forte" du théorème 4 de [M.00].
Ceci montre que le champ d'application du théorème 2.2.2 est plus large que celui du thérème 4 de [M.00].

2.3 Exemple.

Considérons dans Z (par exemple le disque unité de $\mathbb{C}$) une suite de $n-$cycles $(Y_\nu)_{\nu\geq 1}$ qui converge au sens de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ vers le cycle $\emptyset$ (par exemple, avec $n = 0$, on peut prendre $Y_\nu = \{1 - 1/\nu\}$). Considérons alors un $n-$cycle X_0 de Z fixé (par exemple $X_0 = \{0\}$). Soit alors

$$|Q| := \{X_\nu, \nu \geq 0\}$$

où l'on a posé $X_\nu := X_0 + Y_\nu$ pour $\nu \geq 1$. Alors Q^f est un sous-ensemble fermé discret de $\mathcal{C}^f(Z)$ alors que Q^{loc} est un compact de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ constitué d'une suite convergente et de sa limite.
Il est clair que dans ce cas Q^f est un sous-ensemble analytique fermé de dimension finie alors que n'est certainement pas le cas pour Q^{loc}.

3 Relations d'équivalence méromorphes.

Nous proposons dans ce paragraphe de reprendre avec le point de vue que nous avons introduit les résultats du paragraphe 3 de [M.00].

3.1 Familles f-méromorphes de cycles.

Soit S un espace analytique réduit de dimension finie et soit $\Sigma \subset S$ un sous-ensemble analytique fermé d'intérieur vide de S. Nous appellerons modification propre locale de S de centre contenu dans Σ la donnée d'un ouvert S' de S (par exemple un voisinage ouvert d'un point $s_0 \in \Sigma$) et d'une modification holomorphe propre $\tau : \tilde{S} \to S'$.

[16]Bien que les compacts de Q^f soient homéomorphes à leurs images !

Définition 3.1.1 *Soit S un espace analytique réduit de dimension finie et soit $\Sigma \subset S$ un sous-ensemble analytique fermé d'intérieur vide de S. Soit $(X_s)_{s\in S\setminus\Sigma}$ une famille f-analytique de cycles de Z. On dira que cette famille est $f-$méromorphe le long de Σ s'il existe, au voisinage de chaque point de Σ, une modification propre locale $\tau : \tilde{S} \to S'$ de centre contenu dans Σ, et une famille f-analytique de cycles de Z paramétrée par $\tilde{S}$ telle que sur $\tilde{S} \setminus \tau^{-1}(\Sigma) \simeq S' \setminus \Sigma$ on retrouve la famille f-analytique initiale.*

Proposition 3.1.2 *On considère une famille $(X_s)_{s\in S\setminus\Sigma}$ qui est $f-$méromorphe le long de Σ. Alors il existe un espace faiblement normal $\tilde{S}$ une famille f-analytique $(\tilde{X}_{\tilde{s}})_{\tilde{s}\in\tilde{S}}$ et une modification propre (globale) $\tau : \tilde{S} \to S$ de centre contenu dans Σ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *La restriction à $\tilde{S} \setminus \tau^{-1}(\Sigma) \simeq S \setminus \Sigma$ redonne la famille $(X_s)_{s\in S\setminus\Sigma}$.*
2. *Pour tout ensemble analytique réduit et faiblement normal T muni d'une famille f-analytique $(Y_t)_{t\in T}$ et d'une modification propre locale $\theta : T \to S'$ de centre contenu dans Σ, tel que la restriction à $T \setminus \theta^{-1}(\Sigma)$ de la famille (Y_t) coïncide avec l'image réciproque de la famille initiale, il existe une unique application holomorphe $\varphi : T \to \tilde{S}$ au dessus de S'[17] telle que l'on ait $Y_t = \tilde{X}_{\varphi(t)} \quad \forall t \in T$.*

La preuve de la proposition 3.1.2 va résulter immédiatement de la "construction basique" de *loc. cit.* reprise dans notre cadre.
Fixons dans tout ce qui suit un espace complexe Z de dimension finie et un espace analytique réduit et irréductible S de dimension finie. Nous considèrerons un sous-ensemble analytique fermé $G \subset S \times Z$ irréductible, et nous supposerons que l'application induite par la projection $\pi : G \to S$ est quasi-propre et surjective, et que sa restriction au-dessus de l'ouvert de Zariski $S \setminus \Sigma$ est un morphisme géométriquement plat[18] à fibres de dimension pure n[19].

Soit $\chi : S\setminus\Sigma \to \mathcal{C}_n^f(Z)$ l'application qui classifie la famille f-analytique de $n-$cycles de Z donnée par les fibres de la restriction $\pi : G \setminus \pi^{-1}(\Sigma) \to S \setminus \Sigma$. On notera que l'hypothèse de quasi-propreté de π assure que la famille analytique définie par les fibres de π sur $S \setminus \Sigma$ est bien f-analytique.

[17] C'est à dire vérifiant $\tau \circ \varphi = \theta$.

[18] Voir [B.78].

[19] Si le sous-ensemble analytique fermé d'intérieur vide Σ de S contient le lieu des points non normaux de S ainsi que les points en lesquels la dimension de $\pi^{-1}(s)$ est strictement plus grande que $n := \dim G - \dim S$, cette hypothèse est automatiquement vérifiée.

Nous noterons par $\overline{\Gamma} \subset S \times \mathcal{C}_n^f(Z)$ l'adhérence dans $S \times \mathcal{C}_n^f(Z)$ du graphe Γ de l'applicaton χ. Nous noterons par $\bar{\tau} : \overline{\Gamma} \to S$, la projection.
La preuve de la proposition 3.1.2 est alors conséquence du lemme suivant.

Lemme 3.1.3 *Dans la situation précisée ci-dessus, on a les propriétés suivantes de l'application* $\bar{\tau}$*:*

1. *L'application* $\bar{\tau} : \overline{\Gamma} \to S$ *est indépendante du choix de* Σ *vérifiant les conditions demandées.*
2. *Si la famille f-analytique* $(X_s)_{s\in S\setminus\Sigma}$ *est f-méromorphe le long de* Σ *alors* $\overline{\Gamma}$ *est naturellement muni d'une structure d'espace analytique réduit de dimension finie faiblement normal et et l'application* $\bar{\tau}$ *est une modification holomorphe propre dont le centre est contenu dans* Σ.
3. *Toujours sous l'hypothèse que la famille* $(X_s)_{s\in S\setminus\Sigma}$ *soit f-méromorphe le long de* Σ*, la modification propre de* S *obtenue au 2) précédent vérifie la propriété universelle demandée dans la proposition 3.1.2.*

Comme les autres arguments sont analogues à ceux de [M..00], et par ailleurs assez standards, précisons seulement le point 2). Comme notre problème est local sur S le long de Σ, considérons un point $s_0 \in \Sigma$. Par définition, il existe une modification propre $\tau : \tilde{S} \to S'$ où S' est un voisinage ouvert de s_0 dans S, et une famille f-analytique de $n-$cycles de Z paramétrée par $\tilde{S}$, telle que sur $\tilde{S} \setminus \tau^{-1}(\Sigma) \simeq S' \setminus \Sigma$ on retrouve la famille f-analytique initiale. L'application classifiante de cette famille

$$\tilde{\chi} : \tilde{S} \to \mathcal{C}_n^f(Z)$$

a un graphe $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{S} \times \mathcal{C}_n^f(Z)$. Il est immédiat de vérifier que $\tilde{\Gamma}$ coïncide avec la restriction de $\overline{\Gamma}$ au dessus de S'. Fixons un point $(s, X) \in \overline{\Gamma}$ et soient $E_1, \cdots, E_m$ des écailles adaptées à X de sorte que chaque composante irréductible de X rencontre la réunion des domaines $D(E_i)$ de ces écailles. On a alors une injection holomorphe h d'un voisinage ouvert V de (s, X) dans $S \times \prod_1^m H(\bar{U}_i, Sym^{k_i}(B_i))$, où $k_i := deg_{E_i}(X)$.
La proposition 1.1.7 montre que, puisque $\tilde{\Gamma}$ est localement compact car homéomorphe à $\tilde{S}$, pour V assez petit l'application h est un homéomorphisme sur son image $h(V)$.
Alors l'application composée $h \circ (\tilde{\tau} \times \tilde{\chi}) : \tilde{S} \to S' \times \prod_1^m H(\bar{U}_i, Sym^{k_i}(B_i))$ est propre et d'image $h(V)$. On en déduit que $h(V)$ est un sous-ensemble analytique de dimension finie. On définit alors la structure désirée sur V en transportant par h la structure du normalisé faible[20] du sous-ensemble analytique de dimension finie $h(V)$. Il est facile de voir (c'est le même argument que l'on a déjà utilisé plus haut) que cette structure faiblement normale est indépendante des écailles choisies et se globalise. ∎

[20] Rappelons que la normalisation faible d'un espace analytique réduit de dimension finie est un homéomorphisme.

3.2 Le théorème de f-aplatissement géométrique.

Nous allons maintenant donner la variante du théorème 5 de [M.00] correspondant à notre point de vue.

Théorème 3.2.1 (f-aplatissement géométrique.) *Soit Z un espace analytique complexe de dimension finie et soit S un espace analytique réduit irréductible de dimension s. Soit $G \subset S \times Z$ un sous-ensemble analytique irréductible de dimesion $s+n$ tel que la projection $\pi : G \to S$ soit quasi propre et surjective. Soit $\Sigma \subset S$ un sous-ensemble analytique fermé et d'intérieur vide dans S tel que la restriction*

$$\pi : G \setminus \pi^{-1}(\Sigma) \to S \setminus \Sigma$$

ait pour fibres une famille f-analytique de $n-$cycles de Z.
On suppose que l'application $\bar{\tau} : \overline{\Gamma} \to S$ de la projection sur S de l'adhérence dans $S \times \mathcal{C}_n^f(Z)$ du graphe de l'application classifiante $\chi : S \setminus \Sigma \to \mathcal{C}_n^f(Z)$, est propre.
Alors cette famille est f-méromorphe le long de Σ.

En combinant le théorème ci-dessus et la proposition 3.1.2 on obtient le théorème 0.3.2 donné dans l'introduction.

On remarquera que la condition de propreté de l'application $\bar{\tau}$ demandée est une condition nécessaire pour avoir une famille f-méromorphe. Une fois que l'on a remarqué que cette propriété, qui est locale au voisinage des points de Σ, se préserve par éclatement local, il suffit alors de reprendre la démonstartion du théorème 5 de [M.00] pour conclure.

3.3 Comment vérifier l'hypothèse ?

Terminons en explicitant concrètement ce que signifie cette hypothèse de propreté de l'application $\bar{\tau}$.
Fixons une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^0$ sur Z, c'est à dire une $(1,1)-$forme à coefficients continus et définie positive en chaque point (comme forme hermitienne sur le tangent de Zariski à Z au point).
La caractérisation des compacts de $\mathcal{C}_n^f(Z)$ se traduit par le fait que la condition de propreté de $\bar{\tau}$ au dessus d'un voisinage V du point $s_0 \in \Sigma$ sera réalisée si et seulement si on a

1. Il existe un ouvert $W \subset\subset Z$ tel que pour chaque composante irréductible de chaque $n-$cycle de type fini de Z qui soit limite (au sens de de $\mathcal{C}_n^f(Z)$) de fibres de la restriction de π au dessus de $V \setminus \Sigma$ rencontre W.

2. Il existe pour chaque compact K de Z un nombre C_K tel que pour chaque $s \in V \setminus \Sigma$ on ait
$$\int_{\pi^{-1}(s)\cap K} h^n \leq C_K.$$

Rappelons que la condition 2) caractérise les parties relativement compactes de $\mathcal{C}_n^{loc}(Z)$ en vertu du théorème de E. Bishop [Bi.64].
Remarquons de plus que cette seconde condition est automatique dans la situation du théorème 3.2.1 d'après [B.78].

La première condition est assez délicate à vérifier, puisqu'elle demande de considérer toutes les limites dans $\mathcal{C}_n^f(Z)$ de fibres au dessus de $V \setminus \Sigma$.
On peut cependant remarquer que cette vérification est inutile (car automatique) pour tout cycle irréductible. Plus généralement, elle sera automatique dès que le cycle limite a chacune de ses composante irréductibles qui est limite de composantes irréductibles de cycles génériques.
La difficulté se concentre donc sur les cycles limites qui présentent “plus” de composantes irréductibles que les cycles génériques. Mais même dans ce cas, si les intersections des composantes irréductibles apparaissant à la limite rencontrent un compact fixe, la condition sera encore automatique.
Finalement, il ne reste à vérifier que les composantes irréductibles qui se cassent à la limite, ne créent pas un phénomène de fuite à l'infini. Il est probable qu'en général ceci conduise à une étude difficile du comportement local, quand on s'approche d'un point de Σ, des fibres génériques de π.

4 Références.

B.75 Barlet, D. *Espace analytique réduit* $\cdots$ Séminaire F.Norguet 1974-1975, L.N. 482 (1975), p.1-158.

B.78 Barlet, D. *Majoration du volume* $\cdots$ Séminaire Lelong-Skoda 1978-1979, L.N. 822 (1980), p.1-17.

B.06 Barlet, D. *Finitude de l'espace des cycles dans le cas concave* en préparation.

B.M. Barlet, D. et Magnusson, J. Livre en préparation.

Bi.64 Bishop, E *Conditions for the analyticity of certain sets* Mich. Math. J. 11 (1964), p. 289-304.

C.60 Cartan, H. *Quotients of complex analytic spaces* International Colloquium on Function Theory, Tata Institute (1960), p.1-15.

G.83 Grauert, H. *Set theoretic complex equivalence relations* Math. Ann. 265 (1983), p.137-148.

G.86 Grauert, H. *On meromorphic equivalence relations* Proc. Conf. Complex Analysis, Notre-Dame (1984) Aspects Math. E9 (1986), p.115-147.

K.64 Kuhlmann, N. *Über holomorphe Abbildungen komplexer Räume* Archiv der Math. 15 (1964), p.81-90.

K.66 Kuhlmann, N. *Bemerkungen über holomorphe Abbildungen komplexer Räume* Wiss. Abh. Arbeitsgemeinschaft Nordrhein-Westfalen 33, Festschr. Gedäachtnisfeier K. Weierstrass (1966), p.495-522.

M.00 Mathieu, D. *Universal reparametrization of a family of cycles : a new approach to meromorphic equivalence relations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) t. 50, fasc.4 (2000) p.1155-1189.

Ma.74 Mazet, P. (et Barlet, D.) *Un théorème d'image directe propre* Seminaire Lelong, L.N. 410 (1974), p. 107-116 ; rectificatif L.N. 474 (1975), p.180-182.

R.67 Remmert, R. *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume*, Math. Ann. 133 (1957), p.328-370.

S.93 Siebert, B. *Fiber cycles of holomorphic maps I. Local flattning* Math. Ann. 296 (1993), p.269-283.

Si.94 Siebert, B. *Fiber cycle space and canonical flattning II* Math. Ann. 300 (1994), p. 243-271.